討論一之二 代數證明

題型一 整數性質

(1)（已知）a 為任意一個奇數，b 為任意一個奇數。
（求証）：① $a\times b$ 為奇數。② $a+b$ 為偶數。

(2)（已知） a 為任意一個偶數，b 為任意一個奇數，$a>b$。
（求証）：$(a+b)(a-b)$ 為奇數。

(3) 若 a 為正整數，且 a 被 10 除後餘 5，則 a^2 是偶數還是奇數？

(4)（已知）直角三角形三邊長 6、b、c ，其中 b、c 為正整數，c 為斜邊。
（求証）：$c+b$ 為 36 的因數。

(5)（已知）a 為 b 的因數，a 為 c 的因數。
（求証）：a 為 mb＋nc 的因數。（m、n 為整數）

立即練習一

(1)（已知）a 為任意一個奇數，b 為任意一個偶數。
（求証）：（$a^2 + b^2$）為奇數。

(2) 若 b 為正整數，且 b 被 6 除後餘 2，則 b 是偶數還是奇數？

(3)（已知）a 為偶數，b 為奇數。
（求証）：$2a + b^2$為奇數。

(4)（已知）直角三角形三邊長為 a、8、c（a、c 為正整數），其中 c 為斜邊。
（求証）：64 為 a＋c 的倍數。

(5)（已知）直角三角形三邊長為 a、b、a＋3（a、b 為正整數），其中 a＋3 為斜邊長。
（求証）：b^2為 3 的倍數。

題型二 大小的證明

(1)（已知） $a>b>0$。
（求証）：$a^2 > b^2$。

(2)（已知） $a^2>b^2$，$a>0$，$b>0$。
（求証）：$a > b$。

(3)（已知） $a>0$，$b>0$。
（求証）：$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$。

(4)（已知） a、b 為正整數，且$\sqrt{a}>\sqrt{b}$。
（求証）：$a > \sqrt{ab} > b$。

(5)（已知）$a > 0$，$b > 0$，$a \neq b$。
（求証）：$a^3 + b^3 > a^2b + b^2a$。

立即練習二

(1)（已知）a、b 為正整數，且 $a>b$。
（求証）：$a > \dfrac{a+b}{2} > b$。

(2)（已知）直角三角形三邊長為 2a、a＋b、2b（a、b 為正整數），其中 2b 為斜邊長。
（求証）：$5a = 3b$。

(3)（已知）a 為任意一個奇數，b 為任意一個偶數，且 $a>b$。
（求証）：$(a+b)(a-b)$為奇數。

(4)（已知）a 為任意一個偶數，b 為任意一個奇數。
（求証）：(a^2+b^2)為奇數。

(5)（已知）a、b 為連續的正偶數$(a>b)$。
（求証）：(a^2-b^2)為 4 的倍數。

代數證明--立即練習解答

立即練習一

(1)（證明）：$a = 2m + 1$(其中 m 為整數)，$b = 2n + 1$(其中 n 為整數)，

$\therefore a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2$

$= 2(2m^2 + 2m + 2n^2) + 1$　　其中 $2(2m^2 + 2m + 2n^2)$

為偶數，得（$a^2 + b^2$）為奇數。

(2)（證明）：設 $b = 6k + 2$(其中 k 為整數) $\therefore b = 2$，$3k + 2 =$

$2(3k + 1)$， 其中 $2(3k + 1)$為偶數，故 b 是偶數。

(3)（證明）：$\because$ a 為偶數，可設為 $a = 2m$(m 為整數)，b 為奇數，

可設為 $b = 2n + 1$(n 為整數)

$\therefore 2a + b^2 = 2(2m) + (2n+1)^2 = 4m + 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2m + 2n^2 + 2n) + 1$

$\because 2(2m + 2n^2 + 2n)$ 為偶數　　$\therefore 2a + b^2$為奇數。

(4)（證明）：a、8、c 為直角三角形的三邊長，且 c 為斜邊，

$\therefore a^2 + 64 = c^2$，$c^2 - a^2 = 64$，得$(c-a)(c+a) = 64$，

故 64 為 $a + c$ 的倍數。

(5)（證明）：$\because$ a、b、a+3 為直角三角形的三邊長，且 a+3 為斜邊長，

$\therefore (a+3)^2 = a^2 + b^2$，$a^2 + 6a + 9 = a^2 + b^2$，$b^2$

$= 6a + 9 = 3(2a + 3)$　　故b^2為 3 的倍數。

立即練習二

(1)（證明）：$\because\ a>b$，$\therefore a+a>a+b$ 得 $a>\dfrac{a+b}{2}$……①

$\because\ a>b$，$\therefore a+b>b+b$ 得 $a>\dfrac{a+b}{2}>b$……②

由①、②得 $a>\dfrac{a+b}{2}>b$。

(2)（證明）：$\because\ 2a$、$a+b$、$2b$ 為直角三角形三邊長，且 $2b$ 為斜邊，

$\therefore (2b)^2=(2a)^2+(a+b)^2 \rightarrow 4b^2=4a^2+a^2+2ab+b^2$

$\rightarrow 5a^2+2ab-3b^2=0 \rightarrow (5a-3b)(a+b)=0$

$\rightarrow 5a-3b=0$ 或 $a+b=0 \rightarrow 5a=3b$ 或 $a=-b$

(不合，a、b 為正整數)　故得證。

(3)（證明）：設 $a=2m-1$(其中 m 為整數)，$b=2n$(其中 n 為整數)

$\therefore (a+b)(a-b)=a^2-b^2=(2m-1)^2-(2n)^2$

$=4m^2-4m+1-4n^2=2(2m^2-2m-2n^2)+1$

其中 $2(2m^2-2m-2n^2)$為偶數，得$(a+b)(a-b)$為奇數。

(4)（證明）：設 $a=2m$(其中 m 為整數)，$b=2n+1$(其中 n 為整數)

$\therefore a^2+b^2=(2m)^2+(2n+1)^2=4m^2+4n^2+4n+1$

$=2(2m^2+2n^2+2n)+1$　　其中 $2(2m^2+2n^2+2n)$

為偶數，得(a^2+b^2)為奇數。

(5)(證明)：設 $a=2k+2$，$b=2k$ (其中 k 為正整數)

$a^2-b^2=(2k+2)^2-(2k)^2=4k^2+8k+4-4k^2$

$=8k+4=4(2k+1)$，為 4 的倍數，

故(a^2-b^2)為 4 的倍數。